Mathematica Centrum
Ensemble, formons les mathématiciens de l'avenir

TEST PRÉPARATOIRE LAGRANGE 2019
SOLUTIONS COMPLÈTES

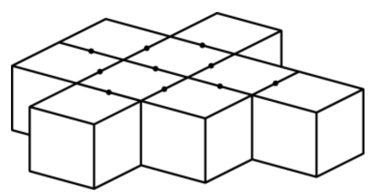
1. La valeur moyenne d'un angle d'un triangle est (180° ÷ 3) 60°. Le plus grand angle d'un triangle est plus grand ou égal à 60°. Le plus petit angle d'un triangle est plus petit ou égal à 60°.

2. Le plus grand facteur premier de 777 est 37.

3. 200% x 1/2 -(-1 + 5) = 2 x 1/2 -(4) = -3.

4. Le produit de deux nombres naturels est 20 (20 x 1, 10 x 2, …). La plus grande somme possible de ces deux nombres est (20 + 1) 21.

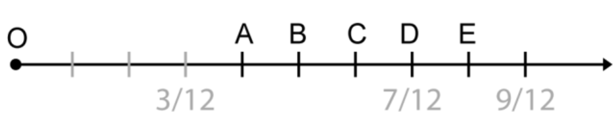
5. 2! = 1 x 2 = 2, 3! = 1 x 2 x 3 = 6, 3!! = (3!)! = 6! = 720. L'expression 2!!!! est la plus petite (2!!!! = 2!!! = 2!! = 2! = 2).

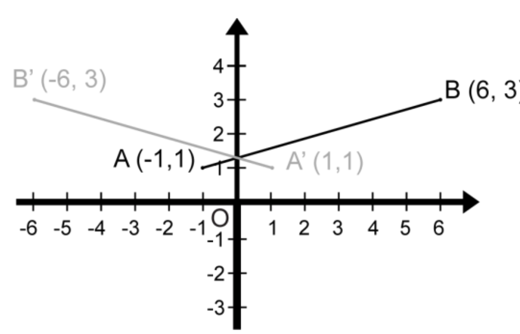


6. Les 9 blocs ci-contre ont 20 faces couvertes de colle. En tout, les onze blocs ont (20 + 6) 26 faces couvertes de colle.

7. La moyenne de 5 entiers différents plus petits que 0 est -5. La somme de ces 5 entiers est (5 x -5) -25. Vous pouvez trouver plusieurs ensembles de 5 entiers négatifs dont la moyenne est -5, mais il y a un ensemble dont le plus petit entier est le plus petit possible. Cet entier est (-25 - (-1 + -2 + -3 + -4)) -15. Allez à la fin du document pour des explications supplémentaires.

8. Les fractions 1/4 (3/12) et 3/4 (9/12) sont représentées sur la droite numérique. Si l'origine de la droite numérique est 0, la lettre qui représente la fraction 7/12 est D.





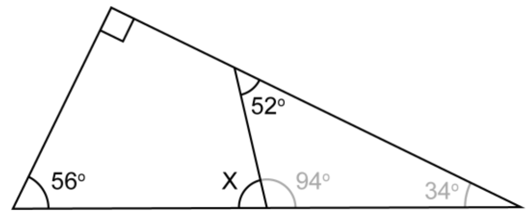
9. Le segment AB est réfléchi par rapport à l'axe des y. Les coordonnées des images des points A et B après la réflexion sont respectivement (1, 1) et (-6, 3).

10. 10% de 20 (2) + 20% de 50 (10) + 30% de 30 (9) = 21.

11. De chaque sommet, on peut tracer (10 - 3) 7 diagonales. Des 10 sommets, on peut tracer (10 x 7) 70 diagonales. Toutefois, sachant que chaque diagonale appartient à 2 sommets, le nombre de diagonales qui peuvent être tracées est (10 x 7 ÷ 2) 35.

12. 1 dm^3 = 1 dm x 1 dm x 1 dm = 10 cm x 10 cm x 10 cm = 1 000 cm^3 et 10 dm^3 = 10 000 cm^3.

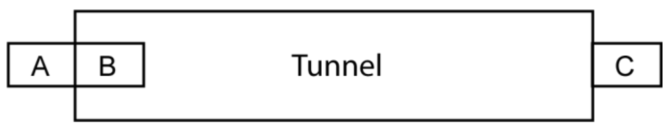
13. Une auto exécute une séquence de cinq déplacements: N2, O4, S6, E4, N1. Les (O4) 4 unités vers l'ouest s'annulent avec les (E4) 4 unités vers l'est. Les 3 déplacements (N2 + N1 + S6) sont équivalents au déplacement S3.



14. Le produit de tous les nombres premiers plus petits que 10 (2 x 3 x 5 x 7) n'est pas divisible par 9.

15. La mesure de l'angle X est (180° - 94°) 86°.

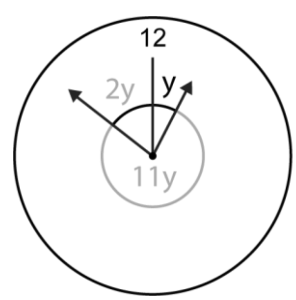
16. Un train se déplaçant à 120 km/h prends 15 s pour entrer complètement dans un tunnel (pour passer de la position A à la position B). En 15 s (1/4 de minute), le train se déplace d'une distance égale à sa propre longueur. À une vitesse de (120 km/60 min) 2 km/min, le train couvre une distance de (2 km x 1/4 min) 0,5 km.



17. Le PPCM de 6, 8 et 10 est (2 x 2 x 2 x 3 x 5) 120.

18. Si x = -3, la valeur de $x^2 - 5x$ est $(-3)^2 - 5(-3) = 24$.

19. Le nombre maximum de dimanches qu'il peut y avoir dans une période de 60 jours est 9. Cela se produit si le premier jour de la période de 60 jours est un dimanche. La suite 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, **57**, … nous indique que le dernier dimanche de la période survient le 57e jour. Toutefois, trouver le nombre maximum de dimanches pour une période plus longue pourrait être difficile. En écrivant la suite sous la forme d'une expression algébrique, nous pouvons simplifier les choses. L'expression algébrique qui définit cette suite est 1 + 7n. Quand n = 0, la valeur de l'expression est 1 (le premier dimanche de la période). Quand n = 1, la valeur est 8 (le deuxième dimanche de la période). Quelle est la valeur de n qui nous donne le dernier dimanche de la période? L'équation 1 + 7n = 60, nous donnera cette valeur. Nous trouvons une valeur de n proche de 8,43. Nous savons que n est un entier et que cet entier ne peut être 9 (la valeur de l'expression serait 64). La valeur doit être 8. Quand n = 8, l'expression nous indique que le dernier dimanche de la période survient le 57e jour. Le nombre maximum de dimanches pour une période quelconque est donné par n + 1, parce que le premier dimanche est donné par n = 0. Le nombre maximum de dimanches durant une période de 60 jours est (n + 1) 9.

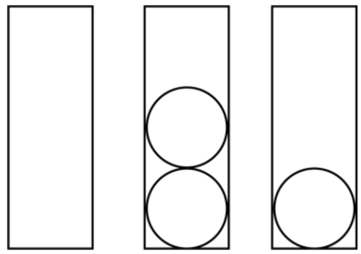


20. Tout terme de la suite (excepté le premier) est égal à 4 fois le terme précédent moins 1. Effectivement 3 = 4 x 1 - 1, 11 = 4 x 3 - 1, … . Le prochain terme de la suite: 1, 3, 11, 43, … est (4 x 43 - 1) 171.

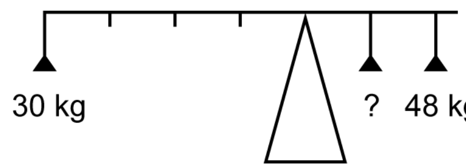
21. Si vous pouviez dépenser 2$ à chaque 20 secondes, vous pourriez dépenser 3 600 fois plus en 20 heures. En 20 heures, vous pourriez dépenser (3 600 x 2$) 7 200$.

22. À 12:00, les deux aiguilles de l'horloge sont ensembles. Quand l'aiguille des heures se déplace de z°, celle des minutes se déplace de 12z°. Quand l'aiguille des heures se déplace de y°, celle des minutes se déplace de 12y°. La somme de y + 11y + 2y doit être égale à 360° (voir diagramme). Nous trouvons une valeur proche de 25,7°. La valeur la plus près de la valeur de l'angle y est 26°.

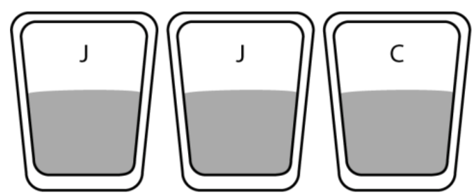
23. Vous pouvez placer 1, 2 ou 3 balles dans le 3e contenant. S’il y a 1 balle dans le 3e contenant, nous pouvons les placer de 3 façons: 0-2-1, 2-0-1 et 1-1-1. S’il y a 2 balles dans ce contenant, nous pouvons les placer de 2 façons: 1-0-2 et 0-1-2. Avec 3 balles, nous trouvons une façon: 0-0-3. En tout, il y a 6 façons différentes de placer 3 balles dans les 3 contenants, si le 3e contenant doit recevoir au moins une balle.



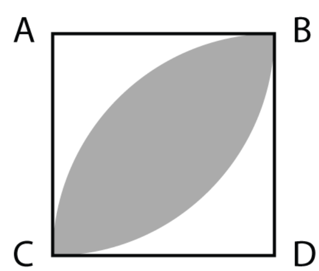
24. Pour expliquer ce problème, nous devons introduire le concept de moment d’une force. Archimède utilisait ce concept pour expliquer le mouvement de rotation des leviers. Archimède définit le moment d’une force par le produit force x distance. Il définit la distance par la distance de la force au point d’appui. La distance de la force de 30 kg au point d’appui est 4. Le moment de cette force de 30 kg est 30 x 4 ou 120. Le moment de la force de 48 kg est 48 x 2 ou 96. Cependant la force de 30 kg produit une rotation antihoraire et celle de 48 kg produit une rotation horaire. Il y a équilibre seulement quand les moments horaires et antihoraires sont égaux. Nous avons besoin d’une autre force du côté droit du point d’appui pour produire cet équilibre. Le poids qui permet au système d’être en équilibre est donné par l’équation: 120 = 96 + F x 1. Nous trouvons F = 24 kg.



25. Deux des trois verres ci-contre contiennent du jus, l’autre contient du café. La probabilité que vous buviez seulement du café est (1/3 x 0) 0. La probabilité que vous buviez du jus est (1 - 0) 1 ou 3/3. Logiquement, nous savons que la réponse est 1, parce que si le premier verre contient du café, le deuxième devra sûrement contenir du jus.



26. Le diagramme ci-contre montre un carré dont le côté est 1 et deux arcs de cercle dont les centres sont les points A et D. Deux fois l’aire de la surface courbe CBDC + l’aire de la partie ombrée est égal à l’aire du carré. L’aire du carré est 1. L’aire de la surface courbe est ($1 - \Pi 1^2/4$) $1 - \Pi/4$. De l’équation $2(1 - \Pi/4)$ + l’aire de la surface courbe = 1, nous tirons que l’aire de la surface ombrée est égale à $\Pi/2 - 1$.



7. Cette question est problématique. Certains étudiants utilisent la méthode donnée à la page 1 pour la résoudre. D'autres trouvent la solution tout simplement en notant que le seul choix possible est -15, car aucun ensemble de 5 entiers négatifs dont la moyenne est -5 peut avoir les entiers -16, -17, -18 ou -19 comme son plus petit entier. Effectivement, -15 est le plus petit entier négatif possible que l'on peut trouver quand les quatre autres sont les plus grands possibles (-4, -3, -2, -1). Cet ensemble est {-15, -4, -3, -2, -1} et sa moyenne est -5. D'autres ne peuvent résoudre le problème parce que rien dans la question ne les pousse dans la direction qui pourrait les aider à résoudre le problème. Le problème serait autrement plus simple si la question avait été écrite différemment. Si la question avait été formulée sous la forme ''Le plus petit de ces 5 entiers pourrait être" … . Étant donnée la nature problématique de cette question, nous avons décidé d'annuler la question #16 (semblable à celle-ci) des Concours Euler, Lagrange et Newton 2019. Pour être juste envers chaque participant, pour s'assurer que tous les étudiants performent au maximum de leur potentiel et pour s'assurer que les scores parfaits soient encore possibles, nous avons décidé d'octroyer une bonne réponse à tous les étudiants pourvu qu'ils noircissent le cercle contenant la lettre B (16 B) sur la feuille de réponse. Toutes les personnes responsables recevront une note importante leur rappelant de bien vouloir accomplir cette tâche avec leurs étudiants qui participent aux Concours Euler, Lagrange et Newton 2019.