Mathematica Centrum

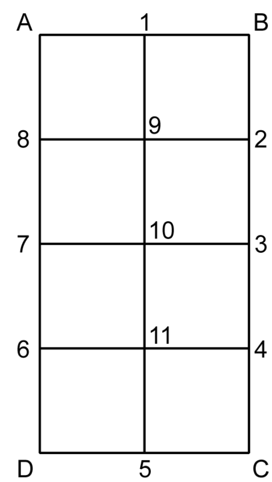
Ensemble, formons les mathématiciens de l'avenir

TEST PRÉPARATOIRE LAGRANGE 2016
SOLUTIONS COMPLÈTES

1. Les facteurs premiers de 333 sont {3, 3, 37}. Le plus grand facteur premier de 333 est 37.

2. Deux de ces nombres, 1 et 64, sont des carrés et des cubes parfaits. En effet, $64 = 8^2 = 4^3$ et $1 = 1^2 = 1^3$.

3. Pour ne pas oublier aucun rectangle, nous avons numéroté les sommets possibles de ces rectangles. Il y a 7 rectangles ayant une base de 2 unités. Ce sont A-B-2-8, A-B-4-6, A-B-C-D (le rectangle initial lui-même), 8-2-3-7, 8-2-C-D, 7-3-4-6 et 6-4-C-D. Il y a 12 rectangles ayant une base de 1 unité. Ce sont A-1-10-7, A-1-11-6, A-1-5-D, 8-9-11-6, 8-9-5-D, 7-10-5-D et leurs 6 rectangles symétriques 1-B-3-10, 1-B-4-11, 1-B-C-5, 9-2-4-11, 9-2-C-5 et 10-3-C-5. En tout, on peut compter 19 rectangles.



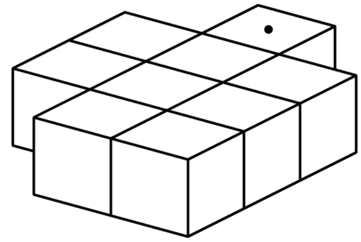
4. Vingt-sept (3 x 3 x 3) cubes dont les arêtes mesurent 2 cm sont requis pour former un cube dont les arêtes mesurent 6 cm.

5. Le nombre Z, représentant la moyenne des quatre autres choix, doit satisfaire l'équation: Z x 4 = somme des 4 autres. Ce nombre est -3, car -3 x 4 = 4 + (-4) + (-17) + 5.

6. J'ai donné 1/2 x 1/3 x 1/4 = 1/24.

7. La moyenne de tous les nombres naturels de 1 à 2 000 (1 000,5) multiplié par 2 000 donnera la somme recherchée. Cette somme est égale à (1 000,5 x 2 000) 2 001 000.

8. Un seul bloc a seulement une face qui est couverte de colle, celui identifié par un point. Huit blocs ont au moins deux faces qui sont couvertes de colle.

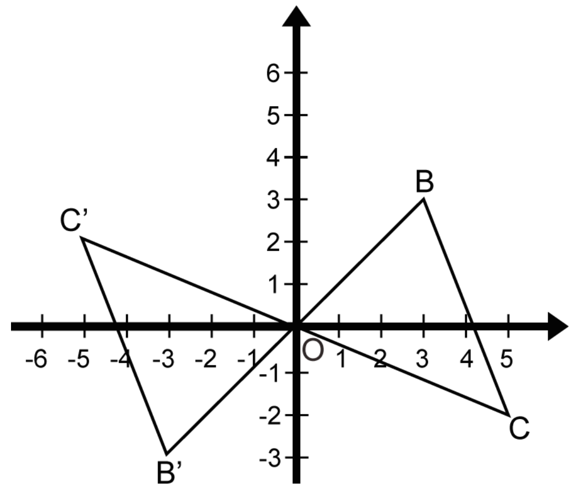


9. Si la moitié de N est 12, N vaut 24 et 4N vaut 96.

10. Si c est la longueur de chaque côté du carré, son aire est c^2. Si la longueur de chaque côté était réduite de 25%, chaque côté du nouveau carré aurait une longueur de 3/4 c. L'aire du nouveau carré serait 9/16 c^2. Donc l'aire du carré serait réduite de (c^2 - 9/16 c^2) 7/16 c^2. En pourcentage, l'aire serait réduite de (7/16) 43,75%.

11. Le PPCM (3, 7) est 21. Le PGCD (12, 18) est 6. Le produit de 21 x 6 est 126.

12. Faites tourner le Δ OBC de 180º autour de l'origine O. Les coordonnées de B' (image de B) sont (-3, -3).



13. Mathusalem a perdu 40% de son poids durant l'été. Son poids, au début de l'été, était (100 ÷ 60 x 100) 166 2/3 kg. Au kilogramme près, son poids était 167 kg.

14. Si 1/2 + 1/3 + 1/n = 53/6, alors 1/n = 53/6 - 5/6 = 8 et n = 1/8.

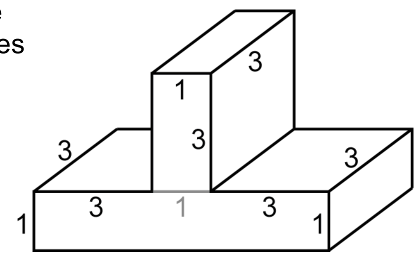
15. La probabilité qu'elle choisisse le chandail jaune avec la jupe en laine est (1/4 x 1/2) 1/8.

16. Avec un chiffre, on peut former 1 (1^1) nombre naturel, avec 2 chiffres on peut former 4 (2^2) nombres naturels, et avec 3 chiffres on peut former 3^3 ou 27 nombres naturels de 3 chiffres.

17. Si P = $10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5$, la somme des chiffres de P (111 110) est 5.

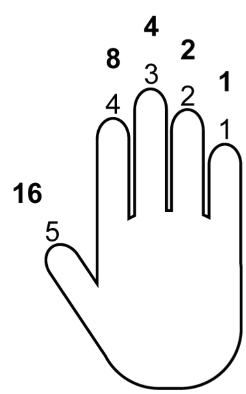
18. L'expression algébrique qui peut générer la suite des nombres qui donne un reste de 2 lorsqu'ils sont divisés par 4 (2, 6, 10, 14, …) est 4n + 2.

19. Le volume, en cm^3, du solide rectangulaire représenté est donné par la somme des volumes des deux prismes rectangulaires qui le constituent. Ce volume est (1 x 3 x 3 + 7 x 3 x 1) 30 cm^3.



20. Si x = -2, la valeur de $-3x + 2x^2 - 2x^3$ est ($-3(-2) + 2(-2)^2 - 2(-2)^3 = 6 + 8 + 16$) 30.

21. Ben Binaire utilise le système binaire. Le doigt 1 représente la valeur de 1 (2^0) quand il est allongé et zéro quand il est replié. Le doigt 2 représente la valeur de 2 (2^1) quand il est allongé et zéro quand il est replié. Le doigt 3 allongé représente 4 (2^2), le doigt 4 allongé représente 8 (2^3) et le doigt 5 allongé représente 16 ou 2^4. Quand les 5 doigts sont allongés, Ben représente donc le nombre (1 + 2 + 4 + 8 + 16) 31. Pour représenter le nombre 7, il doit allonger les doigts 1-2-3. En passant, Ben Binaire peut représenter un total de 32 nombres naturels (les nombres de 0 à 31).



22. La valeur de A (voir figure ci-après) est 1 car si A valait 2 ou plus, le produit de la multiplication donnerait un nombre de 5 chiffres. La lettre B ne peut valoir 0, 2, 4, 6 ou 8 car le chiffre des unités de DEDB serait un zéro. B doit valoir 5 car c'est le seul chiffre impair qui produira un chiffre des unités de 5 dans le résultat DEDB. Après quelques calculs et déductions, on peut conclure que C doit valoir 3 et que D doit valoir 7.

23. Les facteurs premiers de 210 sont {2, 3, 5, 7}. Le nombre dont le produit des 3 chiffres est égal à 210, doit être formé par les chiffres 6 (2 x 3), 5 et 7. Même s'il y a plusieurs nombres qui sont formés de ces 3 chiffres (567, 756, 657, …), la somme des 3 chiffres est toujours (5 + 6 + 7) 18.

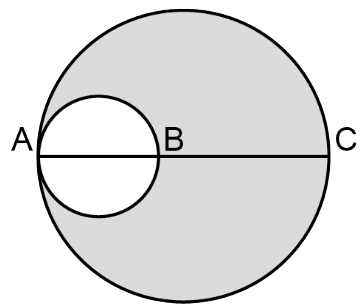
$$\begin{array}{r} A\ B\ C\ B \\ \times \qquad\quad 5 \\ \hline D\ E\ D\ B \end{array}$$

24. Si p devient p/2 et q devient 6q/5, l'expression p^2q^2 devient $(p/2)^2$ x $(6q/5)^2$. Cette expression est égale à 9 $p^2q^2/25$. L'expression p^2q^2 perdra (p^2q^2 - 9 $p^2q^2/25$) 16/25 de p^2q^2.

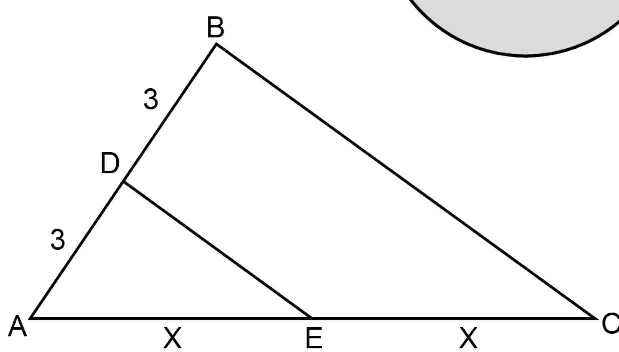
	△	□	Total
A	m	n	35
B	m	p	50
C	p	n	45

25. Nous savons que m + n = 35, m + p = 50 et p + n = 45. En additionnant ces trois équations, nous obtenons (2m + 2n + 2p = 130) m + n + p = 65. Puisque m + n = 35, nous concluons que le nombre de carrés dans la boîte B est (p = 30) 30.

26. Deux cercles sont toujours semblables. Puisque AC : AB = 4, nous savons que la constante de proportionnalité K est 4. L'aire du grand cercle est donc (K^2 = 16) 16 fois plus grande que l'aire du petit cercle. L'aire de la partie ombrée représente (16/16 - 1/16) 15/16 de l'aire du grand cercle.



27. Dans le triangle ABC, AD = 3 cm, DB = 3 cm et AE = EC = X cm. Si l'aire du Δ ABC est égale à 20 cm^2, quelle est l'aire du Δ ADE?



Les deux triangles sont semblables et K = 2. L'aire du Δ ABC est (K^2) 4 fois plus grande que celle du Δ ADE. L'aire du Δ ADE est égale à (20 cm^2 ÷ 4) 5 cm^2. Il y a une autre façon de trouver l'aire du Δ ADE: utilisant la figure (ci-dessous), nous pouvons écrire que l'aire du Δ ABC est 2h x 2X ÷ 2. Puisque cette aire est égale à 20 cm^2, nous trouvons que X h = 10 cm^2 et que l'aire du Δ ADE (X h ÷ 2) est égale à 5 cm^2.