Mathematica Centrum
Ensemble, formons les mathématiciens de l'avenir

TEST PRÉPARATOIRE 2011
SOLUTIONS COMPLÈTES

EULER (7^e) – LAGRANGE (8^e) – NEWTON (9^e)

1. La somme des facteurs premiers de 20 (2 x 2 x 5) est 9.

2. La valeur de Y est 150°, celle de X est (180° - 150°) 30°. La valeur de 2Y + X est 330°.

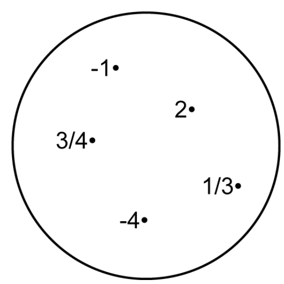
3. Le 14 avril 2011 (2011 n'est pas une année bissextile) arrivera 365 jours (52 x 7 + 1) après le 14 avril 2010. Ce jour surviendra 52 semaines et 1 jour après le 14 avril 2010. Il tombera un jeudi.

4. Le résultat de 0,1 x 0,1 x 0,1 x 10 est 0,01, soit 1%.

5. L'exception est 12 (1, 2, 3, 4, 6, 12) qui a 6 facteurs.

6. Un nombre divisé par 3 donne un reste de 1. Ce nombre est de la forme 3N + 1. En remplaçant N par 0, 1, 2, 3, … on obtient l'ensemble des nombres de cette forme {**1**, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, …}. Un autre nombre divisé par 3 donne un reste de 2. Ce nombre est de la forme 3N + 2. En remplaçant N par 0, 1, 2, 3, … on obtient l'ensemble des nombres de cette forme {2, **5**, 8, 11, 14, 17, 20, 23, …}. Le produit de ces nombres ne pourrait être 25 car ce nombre ne peut être obtenu que par le produit de 5 x 5 ou 1 x 25.

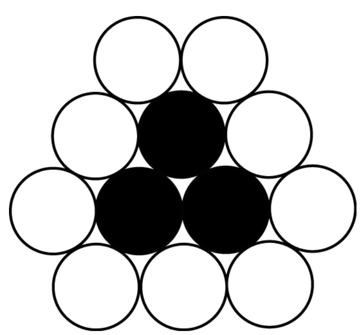
7. 5 1/3 x 2 1/4 x 3/8 x 4/9 = 16/3 x 9/4 x 3/8 x 4/9 = 16/8 = 2.



8. Aucun des éléments de l'ensemble ne vérifie l'inéquation $x^2 < -x$. En effet $(-1)^2 = 1$, $2^2 > -2$, $(3/4)^2 > -3/4$, $(-4)^2 > 4$ et $(1/3)^2 > -1/3$.

9. Il faut 9 cercles pour entourer complètement les 3 cercles tangents.

10. Le carré parfait de 4 chiffres 2mn1 pourrait être (51^2) 2**60**1 ou (49^2) 2**40**1. La valeur possible de m + n est 6 ou 4.



11. La somme de 2 nombres entiers est 1 et leur produit est -2. Les facteurs de 2 sont 1et 2. On peut obtenir un produit de -2 de deux façons différentes: 1 x -2 et -1 x 2. Puisque la somme des 2 nombres est 1, on conclut que les 2 nombres sont 2 et -1. Leur quotient pourrait être -2 ou -1/2.

12. Le nombre de secondes dans une heure est (1h = 60min = 60 x 60s) 3 600 secondes. 3 600 minutes sont égales à 60 heures (60h = 60 x 60min = 3 600min).

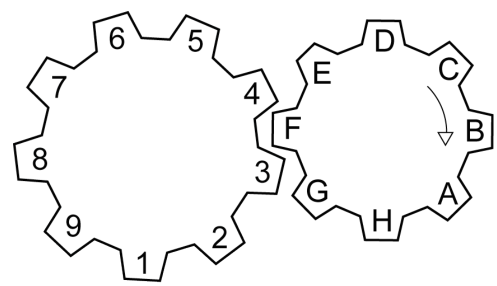
13. Les valeurs de y sont compris entre 0 et 3. Donc y est toujours positif. Les valeurs de x sont compris entre -4 et 0. Donc x est toujours négatif. La réponse y - x >0 (y > x) est toujours vraie.

14. La moyenne de -1/2 et 1/3 (-1/2 + 1/3 = -3/6 + 2/6 = -1/6 et -1/6 ÷ 2 = -1/12) est -1/12.

15. La distance parcourue par l'auto quand chaque pneu fait 100 révolutions est (100 x π x 1) 100π, soit environ 314 m.

16. Il reste 5 billes dans le triangle. Mathilde ne peut pas gagner la partie. En effet, si elle retire une bille, Mathieu en retire 3 (dont la 14^e) et il gagne la partie. Si Mathilde en retire 2, Mathieu en retire 2, Mathieu gagne encore. Si Mathilde en retire 3, Mathieu en retire 1 et gagne la partie. Mathieu était assuré de gagner la partie parce qu'il a retiré la 10^e bille. La personne qui retire la 10^e bille est certain de retirer la 14^e. Pour être certain de retirer la 10^e bille, il faut retirer la 6^e. Finalement, pour être certain de retirer la 6^e bille, il faut retirer la 2^e bille. En appliquant cette méthode, le joueur qui joue en premier est en mesure de gagner toute partie.

17. Le résultat de $1 + 3 = 4 = 2^2$. Le résultat de $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$. Le résultat de $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 = 16$. La somme de la série des ''n'' premiers nombres impairs consécutifs est toujours n^2. Pour savoir combien il y a de termes dans une série de nombres impairs consécutifs, on calcule la demie somme du premier et du dernier terme de la série. La série 1 + 3 + 5 + 7 … + 41 a ((1 + 41) ÷ 2) 21 termes. Le résultat de cette série est 21^2 (441).



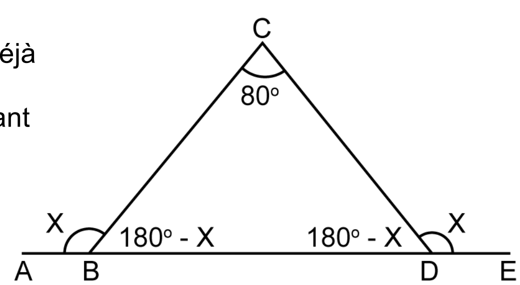
18. La dent F est engrenée avec les dents 3 et 4. Quand la roue de droite tourne dans le sens indiqué, les dents lettrées se succèdent dans l'ordre suivant: F, G, H, A, B, C….Les dents numérotées de la roue de gauche se succèdent dans l'ordre suivant: 3-4, 2-3, 1-2, 9-1, 8-9, …. La succession des dents engrenées sera 3F4, 2G3, 1H2, 9A1 … . Les dents qui seront engrenées quand la dent A prendra la position de la dent F sont 1A9.

19. Quatre voisins ont acheté une souffleuse à neige et ont partagé le coût également. Si x est le prix de la souffleuse, chaque voisin a payé x/4. S'ils étaient seulement trois voisins, chacun aurait payé x/3. On peut écrire que x/3 - x/4 = 105, 4x/12 - 3x/12 = 105, 4x - 3x = 1 260 et x = 1 260$. Si 5 voisins avaient acheté la souffleuse, chacun aurait payé (1 260 ÷ 5) 252$.

20. Le rayon du cercle est 2. La longueur du cercle est (2π2) 4π. La longueur d'un quart de cercle est π.

21. Un avion parcourt 150 km en 15 minutes. Sa vitesse moyenne est (150 km ÷ 15min) 10 km/min, soit 600 km/h.

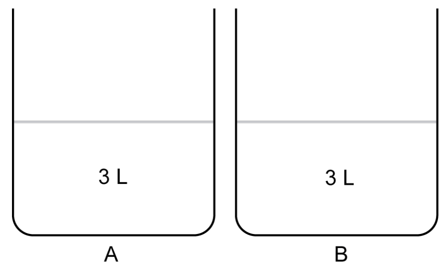
22. Mathieu a reçu 1 + 3 + 5 + … = 1 000 000. On sait déjà que $n^2 = 1\,000\,000$, donc que n = 1 000. Il a reçu un certain montant (1, 3, 5, …) à chaque semaine pendant 1 000 semaines. Le montant x de la 1 000^e semaine est donnée par l'équation: (1 + x) ÷ 2 = 1 000 (voir numéro 17). Cette équation devient 1 + x = 2 000. Nous trouvons que x = 1 999. La dernière semaine, Mathieu a reçu 1 999$.



23. La valeur de X est donnée par l'équation 180° - X + 180° - X + 80° = 180°. On trouve que X = 130°.

24. La valeur de 2^{25} est $2^5 \times 2^5 \times 2^5 \times 2^5 \times 2^5 = 32 \times 32 \times 32 \times 32 \times 32 = 33\,554\,432 = 3{,}4 \times 10^7$. La réponse la plus près est 10^7.

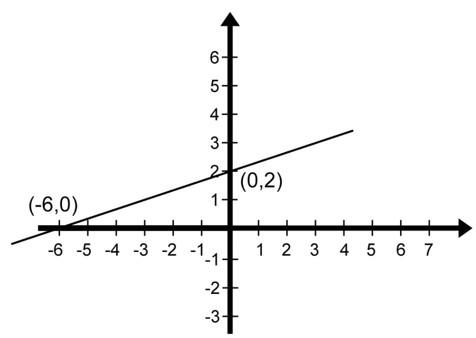
25. Le théorème de Pythagore stipule que, dans un triangle rectangle, si c représente la longueur de l'hypoténuse et a et b représentent les longueurs des deux autres côtés, alors $a^2 + b^2 = c^2$. Si a et b sont deux côtés d'un carré (a = b = 1) et c la longueur d'une diagonale, alors $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ et $c = \sqrt{2}$.



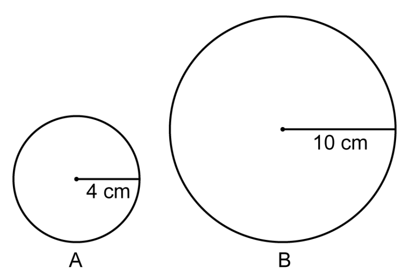
26. Le récipient A contient 3 litres d'eau. Le récipient B contient un mélange homogène de 2 litres de vin et 1 litre d'eau. Un litre du mélange de B est versé dans A. Ce litre contient 2/3 de litre de vin et 1/3 de litre d'eau. Le récipient A contient maintenant 3 1/3 litres d'eau et 2/3 de litre de vin. Le récipient A contient un total de (3 1/3 + 2/3) 4 litres de mélange homogène. Le vin représente (2/3 ÷ 4 = 2/12) 1/6 du mélange contenu dans le récipient A.

27. Puisque j'obtiens un reste de 1 à chaque fois que je divise le nombre par 2, 3, 4 ou 5, ce nombre doit être de la forme 60N + 1. En effet, si le nombre était divisible par 2, 3, 4 et 5 (2 x 3 x 2 x 5), il serait un multiple de 60 (il serait de la forme 60N). Puisqu'il y a un reste de 1, il doit être de la forme 60N + 1. En remplaçant N par 0, 1, 2, 3, 4, … on obtient les nombres 1, 61, 121, 181, 241, … . Le nombre recherché est 181 et la somme de ses chiffres est (1 + 8 + 1) 10.

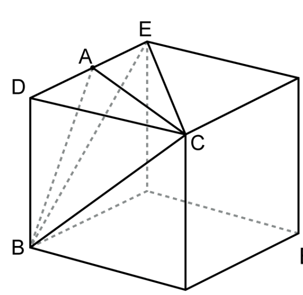
28. La droite 3y - x = 6 est représentée ci-contre. Le nombre de points de treillis sur cette droite est donné par l'équation y = x/3 + 2. Cette équation nous indique que y est entier seulement quand x est un multiple de 3. Pour l'intervalle -6 ≤ x ≤ 4, y est entier pour x = {-6, -3, 0, 3}. Il y a 4 points de treillis sur cette droite pour -6 ≤ x ≤ 4.

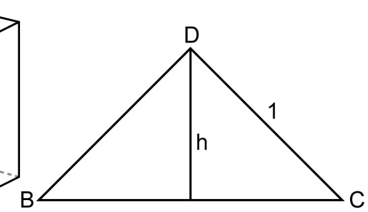


29. Le volume du cylindre A est ($\pi 4^2 \times 20$) $320\,\pi$ cm^3. Le volume de B est donné par l'équation $\pi 10^2 \times h = 320\pi$. Cette équation devient 100h = 320, laquelle donne h= 3,2 cm.



30. Un cube dont l'arête vaut 1 est représenté dans le diagramme ci-contre. Les points B, C, D et E sont quatre sommets du cube, tandis que le point A est un point de l'une de ses arêtes. Le triangle BDC est un triangle rectangle isocèle (angle D = 90° et DA = DC = 1). La longueur de BC est donnée par $BC^2 = 1^2 + 1^2$. La valeur de BC est $\sqrt{2}$. Maintenant regardez le triangle BDC dans lequel nous avons tracé la hauteur h relative à BC. De nouveau, on peut écrire que $h^2 + (\sqrt{2}/2)^2 = 1^2$. Nous trouvons que $h = \sqrt{2}/2$. En passant, les triangles ABC et EBC sont aussi des triangles isocèles. Le triangle EBC est en réalité équilatéral car chacun de ses côtés est égal à $\sqrt{2}$.





31. Étant donné que toutes les pizzas ont la même épaisseur et sont couvertes des mêmes garnitures, le meilleur achat est donné par le coût par cm^2 de pizza. Le membre D a fait le meilleur achat car sa pizza lui revient à 21$ pour une surface de 907,92 cm^2, soit 2,31¢ par cm^2 (E est le deuxième meilleur achat avec 2,38¢/cm^2.)