Mathematica Centrum

Ensemble, formons les mathématiciens de l'avenir

TEST PRÉPARATOIRE 2010
SOLUTIONS COMPLÈTES

EULER (7^e) – LAGRANGE (8^e) – NEWTON (9^e)

1. La valeur de -5 + (-7) - (3 - 5) est -5 - 7 - (-2) = -12 + 2 = -10.

2. La valeur de $2 + 2^3 + \sqrt{16}$ est 2 + 8 + 4 = 14.

3. (5/8 + 1/2) ÷ (7/16 - 2/8) = (5/8 + 4/8) ÷ (7/16 - 4/16) = 9/8 ÷ 3/16 = 9/8 x 16/3 = 6.

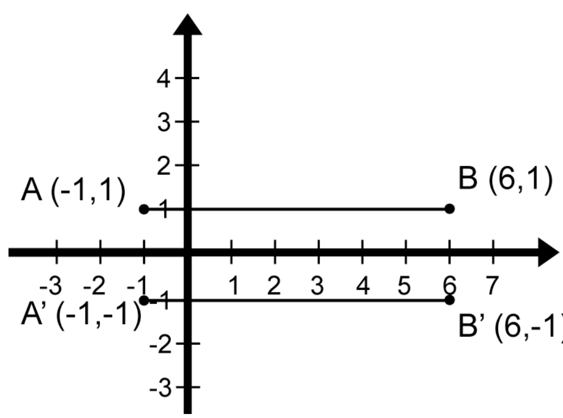
4. Les facteurs premiers de 310 sont 2 x 5 x 31. Le plus grand facteur premier de 310 est 31.

5. Si x% de 25 est 30, nous pouvons dire que x% x 25 = 30, x% = 30/25, x% = 6/5, x% = 120% et x =120. 120% de 20 = 1,2 x 20 = 24.

6. Le produit de deux nombres naturels est 12. Ces deux nombres peuvent être 1 et 12, 2 et 6, 3 et 4, 4 et 3, 6 et 2 et 12 et 1. Leur plus grande somme possible est (1 + 12) 13.

7. Si 1 L du liquide A contient 10% plus de calories que 1 L du liquide B, alors 1 L du liquide A contient 1,1 fois plus de calories que 1 L du liquide B. Si 1 L du liquide A contient 660 calories, alors 1 L du liquide B contient (660 ÷ 1,1) 600 calories.

8. Le segment AB est réfléchi par rapport à l'axe des x. Les coordonnées des images des points A et B après la réflexion sont, respectivement, (-1,-1) et (6,-1).



9. Les éléments -4, -2, -1/2 et 0 ne vérifient pas l'inéquation (-4 < 16, -2 < 4, -1/2 < 1/4 et 0 n'est pas plus grand que 0^2). Les seules valeurs de x qui vérifient l'inéquation $x > x^2$ sont 1/4 > 1/16 et 2/3 > 4/9.

10. La moyenne d'âge minimale de ces 5 personnes est (4 x 49 + 90) ÷ 5 = 57,2 ans. La moyenne maximale est (4 x 90 + 49) ÷ 5 = 81,8 ans. Le seul choix qui pourrait représenter la moyenne d'âge de ces 5 personnes est 79 ans.

11. Le seul chiffre qui a été utilisé 11 fois est le 0 (1**0**, 2**0**, 3**0**, … 1**00**).

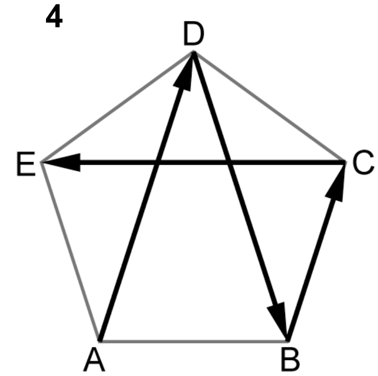
12. La moyenne de 5/6 et 8/12 est ((10/12 + 8/12) ÷ 2) 9/12. La moyenne de 1/3 et 1/2 est ((2/6 + 3/6) ÷2) 5/12. La somme des deux moyennes est (9/12 + 5/12) 14/12 ou 7/6.

13. Le plus petit nombre entier positif qui est divisible par 3, 4, 6 et 8 est le PPCM de ces nombres. Le PPCM de 3 (3), 4 (2 x 2), 6 (2 x 3) et 8 (2 x 2 x 2) est (2 x 2 x 2 x 3) 24.

14. Regardez le diagramme ci-dessous. Après chaque bond, la balle remonte au tiers de la hauteur de laquelle elle est tombée. Après le premier bond, elle remonte à une hauteur de 48 mètres. Après le deuxième, à une hauteur de 16 mètres, … . Elle remontera à une hauteur de moins de 2 mètres après 4 bonds.

144 48 16 5,33 1,78
1 2 3 4

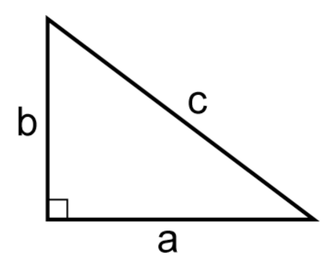
15. Le diagramme montre l'un des trajets (en caractère gras) que le vendeur peut emprunter pour aller de A à E (A**DBC**E). En tout, il peut se déplacer de A à E de 6 façons différentes (A**DBC**E, A**DCB**E, A**BCD**E, A**BDC**E, A**CDB**E et A**CBD**E). Il y a 6 façons différentes de se déplacer de A à E parce qu'il y a 6 (1 x 2 x 3) façons possibles d'agencer les lettres **BCD**.



16. Le résultat de (4 - 3) + (5 - 4) + (6 - 5) + … + (103 - 102) est 100. Nous savons que chaque parenthèse vaut 1, mais nous devons trouver combien il y a de parenthèses. On peut réécrire cette série sous la forme (4 - 3) + (5 - 4) + (6 - 5) + … + (100 - 99) + (101 - 100) + (102 - 101) + (103 - 102). Les 3 dernières parenthèses sont équivalentes à (1 - 0) + (2 - 1) + (3 - 2). Si ces 3 dernières parenthèses sont placées au début de la série, nous obtenons la série suivante: (1 - 0) + (2 - 1) + (3 - 2) + (4 - 3) + (5 - 4) + (6 - 5) + … + (100 - 99). Cette série est composée d'exactement 100 termes. Puisque chaque terme de cette série vaut 1, le résultat est 100.

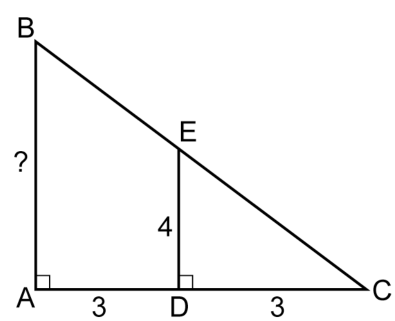
17. Lorsque $10^{20} + 999$ est écrit sous la forme d'un nombre naturel, nous obtenons le nombre (999 + 100 000 000 000 000 000 000) 100 000 000 000 000 000 999. Ce nombre contient 17 zéros.

18. Le théorème de Pythagore stipule que, dans un triangle rectangle, si c représente la longueur de l'hypoténuse et a et b représentent les longueurs des deux autres côtés, alors $a^2 + b^2 = c^2$. Si b = 1 et a = 1, alors $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ et c = √2.



19. La hauteur d'un rectangle est 3 cm et sa base est 5 cm. Lorsque la hauteur est doublée (6 cm) et la base est triplée (15 cm), l'aire du nouveau rectangle est (6 cm x 15 cm) 90 cm^2.

20. Les triangles ABC et DEC sont semblables (le point C est le centre d'homothétie). Le rapport d'homothétie est 2, car AC : DC = 2. La longueur du segment AB est (2 x ED = 2 x 4) 8.



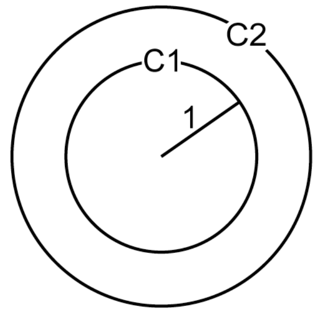
21. Un sac contient x billes rouges et y billes vertes. Si une seule bille est tirée au hasard, la probabilité que la bille choisie soit verte est évidemment y : (x + y).

22. De 3x + 2 = 2x - 2, nous obtenons x = -4. La valeur de 2x + 5 est 2 (-4) + 5 = -3.

23. Deux entiers positifs sont dans un rapport 5 : 3. Si le plus petit est x, alors le plus grand est x + 12. Nous pouvons poser l'équation (x +12) : x = 5 : 3. Cette équation devient 3(x + 12) = 5x, de laquelle nous tirons x = 18. La somme de ces entiers est (18 + 30) 48.

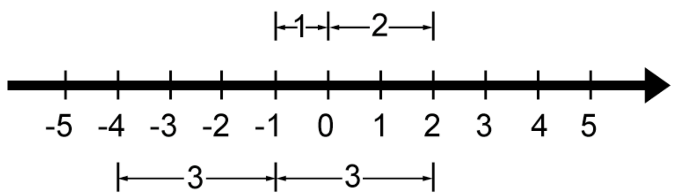
24. Le plus grand de ces nombres est 4 321. Le 2^e est 4 312, le 3^e est 4 231, le 4^e est 4 213, le 5^e est 4 132 et le 6^e est 4 123.

25. L'aire du petit cercle est $\pi 1^2 = \pi$. L'aire du grand cercle est 3 x π. La longueur du grand rayon est donnée par l'équation: $\pi r^2 = 3\pi$. On trouve r = √3. La différence de longueur entre les rayons des deux cercles est √3 - 1. En passant, cette valeur est la plus petite distance possible entre un point de C1 et un point de C2.



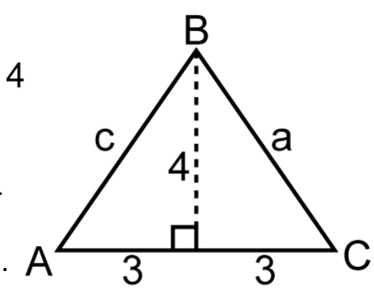
26. Supposons que m est 20. Le nombre de facteurs premiers de 20 est (2 x 2 x 5) 3. Le nombre de facteurs premiers de 400 est (2 x 2 x 2 x 2 x 5 x 5) 6. Le nombre de facteurs premiers de 20^2 est le double de celui de 20. Le nombre de facteurs premiers de m^2 est toujours le double de celui de m. Si le nombre m^2 a 10 facteurs premiers, le nombre m en a 5.

27. Regardez la droite numérique représentée ci-dessous. Les deux nombres qui sont 2 fois plus loin de 2 que de -1 sont 0 et -4.



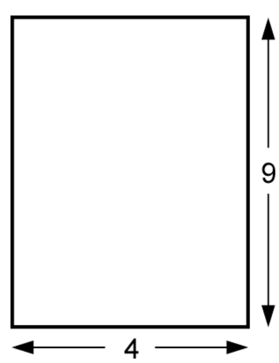
28. Le produit de (x + 2) (x + 2) est $x^2 + 4x + 4$.

$$(x + 2)\,(x + 2) = x^2 + 4x + 4$$



29. Si la base b est 6 cm et l'aire est 12 cm^2 , la hauteur h est (6 x h ÷ 2 = 12) 4 cm. Puisque a = c, nous pourrons trouver le périmètre du triangle si nous trouvons la valeur de a. Nous savons que $a^2 = 3^2 + 4^2$. Nous trouvons que a = 5 cm. Le périmètre du triangle est (6 + 5 + 5) 16 cm.

30. 300 = 2 x 2 x 3 x 5 x 5 = 2^2 x 3 x 5^2. Le nombre de diviseurs de 300 est donné par le produit (2 + 1) x (1 + 1) x (2 + 1), soit 18.



31. Le volume du cylindre droit est π x 2^2 x 9. Le volume de la sphère est 4/3 π r^3 = 36 π. Nous trouvons que r^3 = 27 et r = 3.

32. De x/3 = y/4, nous trouvons 4x = 3y et 8x = 6y. La valeur de (8x + 6y) : 2y est (6y + 6y) : 2y = 6.